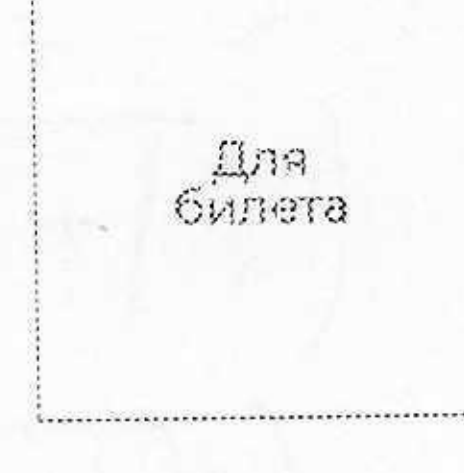
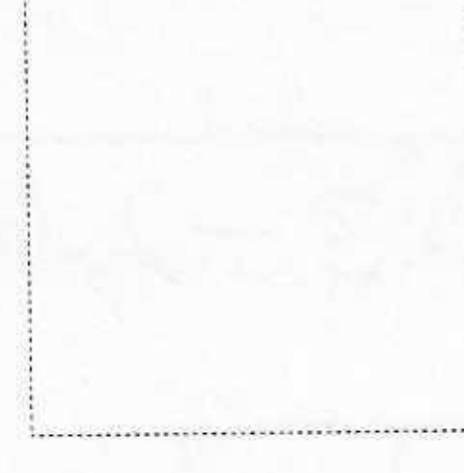
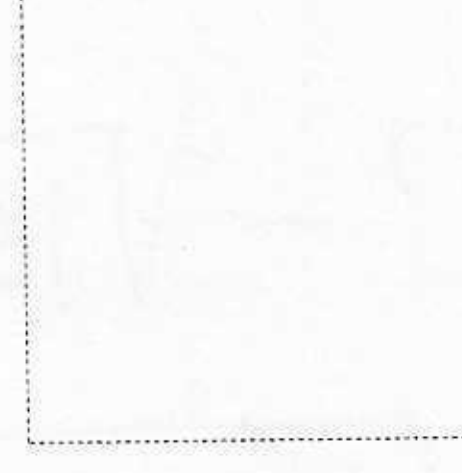
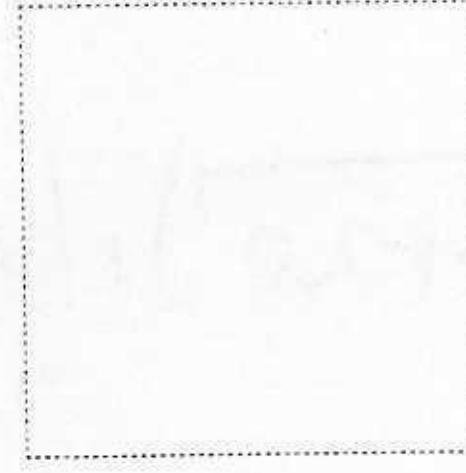
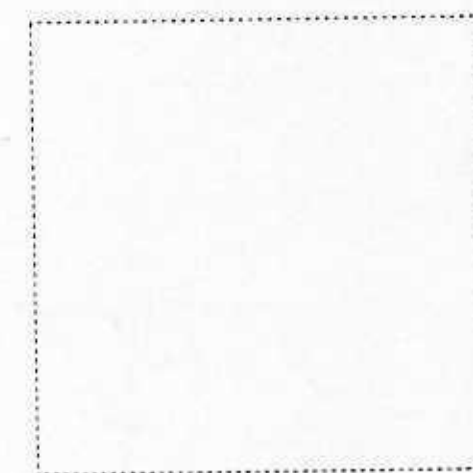
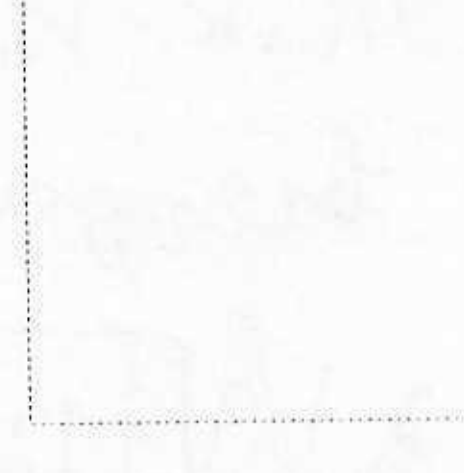
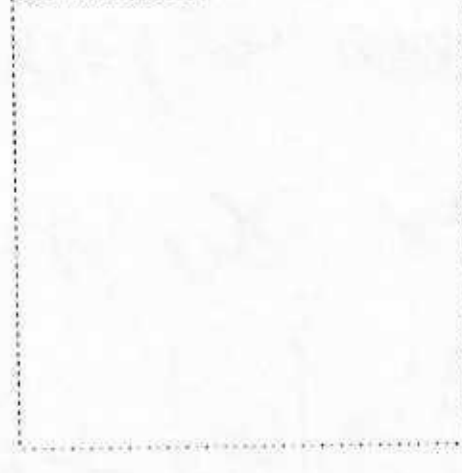
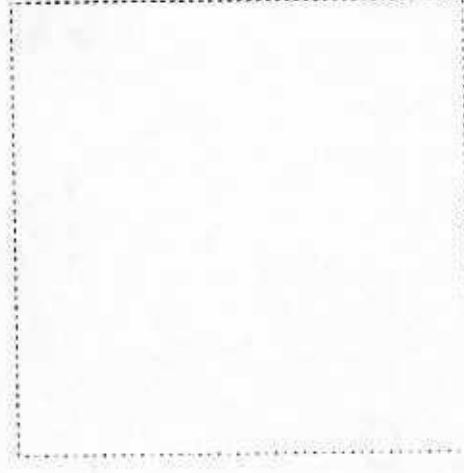
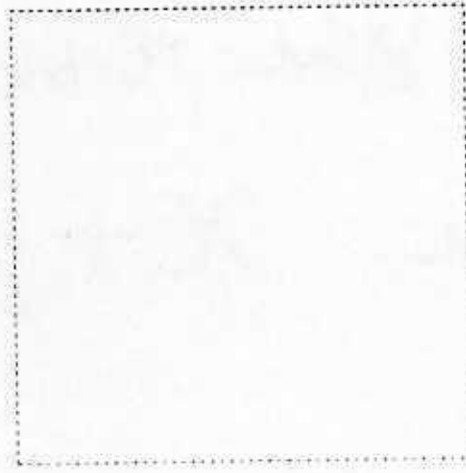




ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»



Для
билета

Вариант задания

2

Лист работы

1 из 3

N 1.

$$x^2 - 2x - \alpha(\alpha + 2) = 0 \quad \text{два корня, меньший больше } \frac{1}{2}.$$

$$a' = 1 \quad b' = -2 \quad c' = -\alpha(\alpha + 2)$$

$$D = b'^2 - 4a'c'$$

$$D = 4 - 4 \cdot (-\alpha(\alpha + 2)) = 4 + 4\alpha(\alpha + 2) = 4\alpha^2 + 8\alpha + 4 = (2\alpha + 2)^2$$

$$D < 0$$

$$(2\alpha + 2)^2 < 0$$

$$\alpha \in \emptyset$$

$$D = 0$$

$$(2\alpha + 2)^2 = 0$$

$$\alpha = -1$$

1 корень

$$D > 0$$

$$\alpha \neq -1$$

2 корня x_1, x_2

$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{D}}{2a'}$$

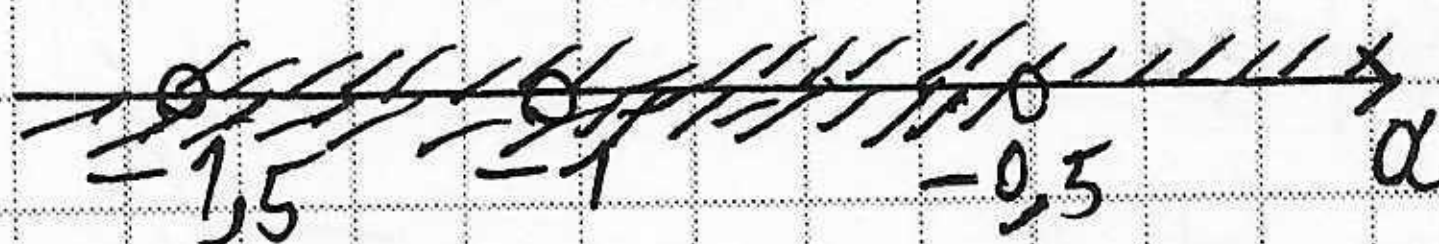
$$x_1 = \frac{2 + 2\alpha + 2}{2} = 2 + \alpha$$

$$x_2 = \frac{2 - 2\alpha - 2}{2} = -\alpha$$

П.с.к. больший корень больше меньшего, а меньший больше $\frac{1}{2}$, то оба корня больше $\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} 2 + \alpha > \frac{1}{2} \\ -\alpha > \frac{1}{2} \\ \alpha \neq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha > -1,5 \\ \alpha < -0,5 \\ \alpha \neq -1 \end{cases}$$



$$\alpha \in (-1,5; -1) \cup (-1; -0,5)$$

Ответ: при $\alpha \in (-1,5; -1) \cup (-1; -0,5)$.

N2.

$$\sqrt{-|x+y|} + 1 > 0$$

$$\text{Отн.: } -|x+y| \geq 0$$

$$(\sqrt{|12\sqrt{5}-29|} - \sqrt{|12\sqrt{5}+29|}) \cdot |y| + 6 = 0$$

П.к. модуль неотрицателен, то

$$1) \sqrt{-|x+y|} + 1 > 0$$

П.к. корни неотрицательны, то верно всегда при действительных x, y .

$-|x+y| \leq 0$ всегда. Значит оба укл. выполняются только при $x+y=0 \Rightarrow x=-y$.

$$2) (\sqrt{|12\sqrt{5}-29|} - \sqrt{|12\sqrt{5}+29|}) \cdot |y| + 6 = 0$$

$$(\sqrt{|-9+2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 3-20|} - \sqrt{|9+2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{5}+20|}) \cdot |y| = -6$$

$$(\sqrt{|-(3-2\sqrt{5})^2|} - \sqrt{|(3+2\sqrt{5})^2|}) \cdot |y| = -6$$

П.к. квадрат всегда неотрицателен, то $|-(3-2\sqrt{5})^2| = (3-2\sqrt{5})^2$; $|(3+2\sqrt{5})^2| = (3+2\sqrt{5})^2$.

$$(\sqrt{(3-2\sqrt{5})^2} - \sqrt{(3+2\sqrt{5})^2}) \cdot |y| = -6$$

$$(|3-2\sqrt{5}| - |3+2\sqrt{5}|) \cdot |y| = -6$$

$|3+2\sqrt{5}| = 3+2\sqrt{5}$, т.к. оба ~~слагаемых~~ слагаемых положительны.

$$3 < 2\sqrt{5}$$

$$9 < 20$$

$$\text{Значит } 3-2\sqrt{5} < 0 \Rightarrow |3-2\sqrt{5}| = 2\sqrt{5}-3$$

$$(2\sqrt{5}-3 - (3+2\sqrt{5})) \cdot |y| = -6$$

$$(2\sqrt{5}-3-3-2\sqrt{5}) \cdot |y| = -6$$

$$-6 \cdot |y| = -6$$

$$|y| = 1$$

$$y = \pm 1 \Rightarrow x = \mp 1$$

Ответ: $(1; -1), (-1; 1)$.





Вариант задания 2

Лист работы 2 из 3

МЧ.

$2|x+1|=a-x-3$ не менее одного решения, все решения неположительны и больше -3 .

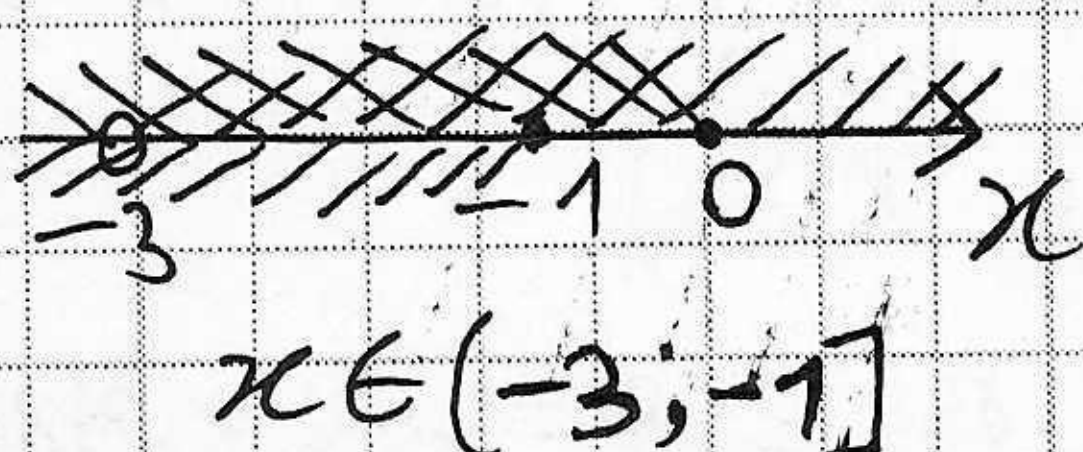
Заметим $x \geq -1$

1) Если $x \leq -1$

$$-2x-2=a-x-3$$

$$1-a=x$$

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ x \leq 0 \\ x > -3 \end{cases}$$



$$-3 < 1-a \leq -1$$

$$-4 < -a \leq -2$$

$$4 > a \geq 2$$

$$a \in [2; 4)$$

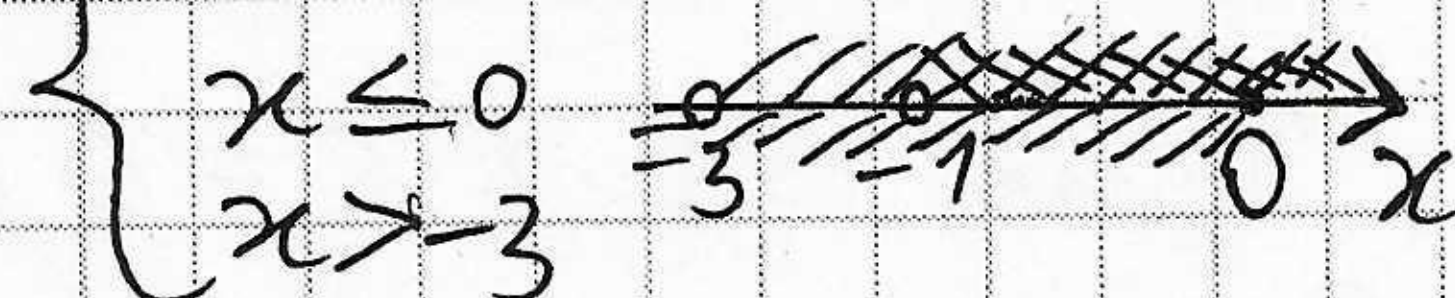
2) Если $x > -1$

$$2x+2=a-x-3$$

$$3x=a-5$$

$$x=\frac{a-5}{3}$$

$$\begin{cases} x > -1 \\ x \leq 0 \\ x > -3 \end{cases}$$



$$x \in (-1; 0]$$

$$-1 < \frac{a-5}{3} \leq 0$$

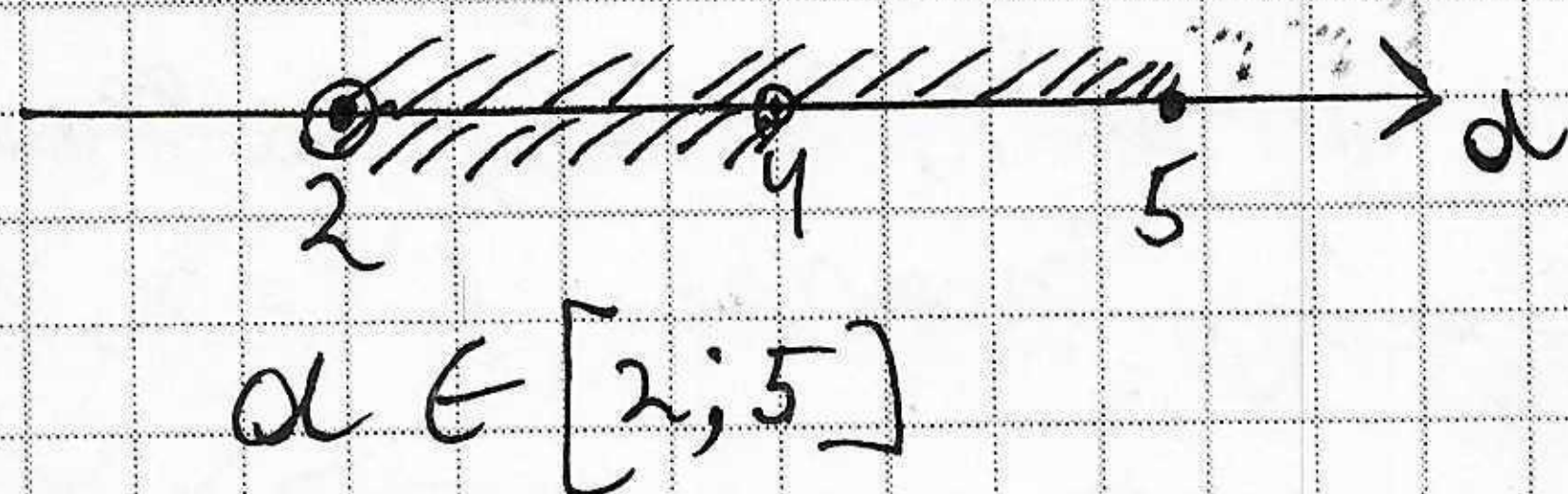
$$-3 < a-5 \leq 0$$

$$2 < a \leq 5$$

$$a \in (2; 5]$$

Получаем:

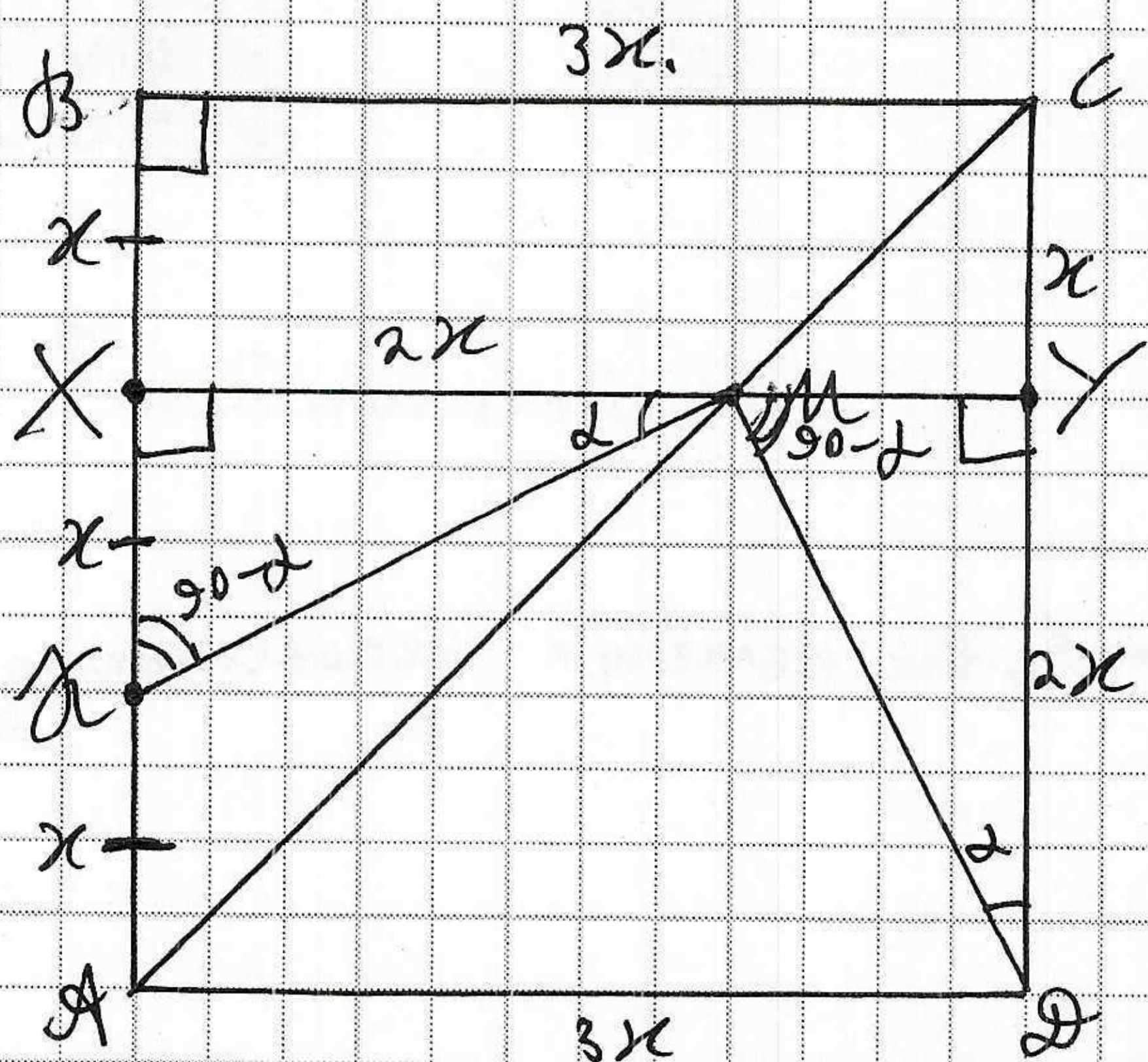
$$\begin{cases} a \in [2; 4) \\ a \in (2; 5] \end{cases}$$



$$a \in [2; 5]$$

Ответ: при $a \in [2; 5]$

№3.



Дано: $ABCD$ - квадрат,
 $K \in AB$, $AK:KB = 1:2$,
 $M \in AC$, $MC:AC = 1:3$
 Найти: $\angle KMD$.

Решение:

П.к. $AC:MC = 3:1$, то $MC = \frac{AC}{3} \Rightarrow$
 $\Rightarrow AM:MC = 2:1$.

Отметим т. X - с.р. KB , тогда

$BX = XK = KA$. Проведём отрезок XM .

Рассмотрим $\angle BAC$. По теореме, обратной теореме Палеса, т.к.

$BX:XA = CM:MA = 1:2$, то $BC \parallel XM \Rightarrow \angle CBX = \angle XMK =$
 $= 90^\circ$ (соотв. при $XM \parallel BC$ и с.к. AB).

Пусть $BX = XK = KA = x$, тогда $BC = CD = AD = AB = 3x$.

Рассм. $\triangle AXM$ и $\triangle BXC$:

1) $\angle XAM$ - общий. } $\Rightarrow \triangle AXM \sim \triangle BXC$ по двум стор. и углу меж-

2) $\frac{AX}{AB} = \frac{AM}{BC} = \frac{2}{3}$ }
 по двум стор.

$\frac{AX}{AB} = \frac{AM}{BC} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$. Значит $XM = 2x$.

Продлим XM до пер. CD . П.к. $XM \parallel BC$, а $ABCD$ - квадрат, то $XM \parallel$
 $\parallel AD$. Пусть т. перес. XM и CD - т. Y . По теореме Палеса для $\angle ACD$:

т.к. $MY \parallel AD$, то $\frac{CM}{AM} = \frac{CY}{YD} = \frac{1}{2}$. Значит $CY = x$, $YD = 2x$, т.к. $CD = 3x$.

$AX = YD = 2x$, $AX \parallel YD \Rightarrow AX \parallel YD$ - паралл. $\Rightarrow XY = AD = 3x$.

Тогда $MY = 3x - 2x = x$.

Рассм. $\triangle XMK$ и $\triangle YDM$: $XK = YM = x$, $XM = YD = 2x$, $\angle XMK = \angle YDM = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle XMK = \triangle YDM$ по 2 стор. и углу между ними $\Rightarrow \angle XKM = \angle YMD$,
 $\angle XMK = \angle YDM$.

Пусть $\angle XMK = \alpha$, тогда $\angle XKM = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle YMD = 90^\circ - \alpha$.

$\angle XMK + \angle KMD + \angle YMD = 180^\circ \Rightarrow \angle KMD = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ$

Ответ: 90° .



№ 6.

(15 мая по 15 сентября 4 месяца, т.е. > 120 дней, т.к. в некоторых из них по 31 дню).

Рассмотрим, сколько воды будет очищено за 1 цикл.

Изначально примесей 50%, т.е. $0,5 \cdot 6000 \text{ м}^3 = 3000 \text{ м}^3$, а должно

быть не более 5%, т.е. $0,05 \cdot 6000 \text{ м}^3 = 300 \text{ м}^3$.

На первом этапе объём примесей уменьшится на 45%, т.е. ^{станет} 55%, на втором на 35%, т.е. станет 65%, на третьем на 25%, т.е. станет 75%, а на ^{первый} четвёртом на 20%, т.е. станет 80%. Значит за ~~1~~ цикл число

$$\begin{aligned} \text{примесей станет равным } 0,55 \cdot 0,65 \cdot 0,75 \cdot 0,8 \cdot 3000 \text{ м}^3 &= \frac{55}{100} \cdot \frac{65}{100} \cdot \frac{75}{100} \cdot \frac{8}{10} \cdot 3000 \text{ м}^3 \\ &= \frac{11}{20} \cdot \frac{13}{20} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 3000 \text{ м}^3 = \frac{11 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 600 \text{ м}^3}{400} = \frac{11 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 3 \text{ м}^3}{2} = \frac{1287 \text{ м}^3}{2} = \\ &= 643,5 \text{ м}^3 > 300 \text{ м}^3. \end{aligned}$$

П.с. цикл состоит из неразрывных этапов, то придётся проводить ещё 1 полный цикл. Покажем, что за него содержание примесей достигнет предельных менее 5%:

$$\begin{aligned} \frac{11}{20} \cdot \frac{13}{20} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 643,5 \text{ м}^3 &= \frac{33 \cdot 13 \cdot 1287 \text{ м}^3}{4000} = \frac{429 \cdot 1287 \text{ м}^3}{4000} = \frac{55123 \text{ м}^3}{4000} = \\ &= 138 \frac{123}{4000} \text{ м}^3 < 300 \text{ м}^3. \end{aligned}$$

Второе сооружение очищает 400 м^3 воды в сутки, а первое 200 м^3 воды в сутки. Значит первому сооружению чтобы провести полный цикл очистки потребуется $\frac{6000 \text{ м}^3}{200 \frac{\text{м}^3}{\text{сут}}} \cdot 2 = 60$ суток, а второму $\frac{6000 \text{ м}^3}{400 \frac{\text{м}^3}{\text{сут}}} \cdot 2 = 30$ сут.

~~Значит~~ Золотой механизм и машины для вывоза отходов стоят $1000 \text{ руб.} + 2000 \text{ руб.} = 3000 \text{ руб.}$ в сутки. Значит всего придётся затратить:

$$1) 3000000 \text{ руб.} + 60 \cdot 3000 \text{ руб.} = 3180000 \text{ руб.}$$

$$2) 6000000 \text{ руб.} + 30 \cdot 3000 \text{ руб.} = 6090000 \text{ руб.}$$

~~Значит~~ Первое выгоднее.

Ответ: ~~первое~~ (первое $400 \text{ м}^3/\text{сут}$); ~~3180000 руб.~~ 3180000 руб.

100/200

